***Exercice* 1**

La formulation intégrale du problème s'écrit

$$\int_0^{\ell} \{\mathrm{d}[\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)]/\mathrm{d}x + q\}\,\delta T\mathrm{d}x \;=\; 0 \qquad \forall\,\delta T$$

dans laquelle δT dénote la température virtuelle. Par intégration par parties, on trouve

$$\int_0^{\ell} \kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x - [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)\delta T]\Big|_0^{\ell} \;=\; \int_0^{\ell} q\,\delta T\mathrm{d}x \qquad \forall\,\delta T$$

ou encore

$$\int_0^{\ell} \kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x - [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)]\Big|_{x=\ell}\delta T(\ell) + [\kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)]\Big|_{x=0}\delta T(0) \;=\; \int_0^{\ell} q\,\delta T\mathrm{d}x \quad \forall\,\delta T$$

Comme les conditions de bord sont essentielles (fonction imposée en $x = 0$ et $x = \ell$), les contreparties virtuelles correspondantes sont thermiquement admissibles, c'est-à-dire nulles,

$$\delta T(0) \;=\; \delta T(\ell) \;=\; 0$$

Il s'ensuit que, compte tenu aussi de l'allure du flux de chaleur q, la forme faible a pour expression

$$T \in \mathcal{U} \;:\; \int_0^{\ell} \kappa(\mathrm{d}T/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta T/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\ell/2} q\,\delta T\mathrm{d}x \qquad \forall\,\delta T \;\in\; \mathcal{V}$$

Les classes de fonctions $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ valent

$$\mathcal{U} \;=\; \{T(x)\;\big|\;T(x) \in H^1(]0,\ell[);\, T(0) = T(\ell) = 0\}$$

$$\mathcal{V} \;=\; \{\delta T(x)\;\big|\;\delta T(x) \in H^1(]0,\ell[);\, \delta T(0) = \delta T(\ell) = 0\}$$

***Exercice* 2**

L'équation intégrale associée à la forme faible a pour expression

$$\int_0^{\ell} EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}\delta u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x - P\delta u(\ell) + P\delta u(0) \;=\; 0 \qquad \forall\,\delta u$$

L'intégration par parties donne

$$\int_0^{\ell} [-EA(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2)]\,\delta u\mathrm{d}x + [EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\delta u]\Big|_0^{\ell} - P\delta u(\ell) + P\delta u(0) \;=\; 0 \qquad \forall\,\delta u$$

ou encore

$$\int_0^{\ell} [-EA(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2)]\,\delta u\mathrm{d}x + [EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x) - P]\Big|_{x=\ell}\delta u(\ell) - [EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x) - P]\Big|_{x=0}\delta u(0) \;=\; 0 \qquad \forall\,\delta u$$

Cette équation intégrale ne peut être identiquement nulle quel que soit le déplacement virtuel δu que si les trois termes s'annulent

$$\int_0^{\ell} [-EA(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2)]\,\delta u\mathrm{d}x \;=\; 0$$

$$[EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x) - P]\Big|_{x=\ell}\delta u(\ell) \;=\; 0$$

$$[EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x) - P]\big|_{x=0}\delta u(0) \;=\; 0$$

Dès lors que le déplacement virtuel est arbitraire sur le domaine, la première relation s'écrit

$$-EA(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2) \;=\; 0$$

De plus, comme le déplacement virtuel n'apparaît pas dans les classes de fonctions, $\delta u(0)$ et $\delta u(\ell)$ ne sont pas nuls (conditions aux limites naturelles) et, par conséquent, on a

$$[EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x) - P]\big|_{x=\ell} \;=\; 0$$

$$[EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x) - P]\big|_{x=0} \;=\; 0$$

La forme forte du problème a finalement pour expression

A chercher $u(x) \in C^2([0, \ell]) \;:\; -EA(\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2) \;=\; 0 \qquad 0 < x < \ell$

avec les conditions de bord

$$EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\big|_{x=0} \;=\; P$$

$$EA(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\big|_{x=\ell} \;=\; P$$